

Mitteilungen der Landessternwarte Heidelberg-Königstuhl, Nr. 136

Interstellare Absorption III**Zur Wolkenstruktur des interstellaren Staubes**

H. SCHEFFLER

Eingegangen am 1. August 1966

The structure functions of the interstellar absorption $A(l, b; r)$ have been derived from the data of about 4700 stars near the galactic plane ($|z| < 75$ pc) for 5 distances from the sun (Tab. 1, Fig. 2). Their interpretation shows: More than 80 percent of the interstellar dust must be concentrated into clouds. For $r \lesssim 1.3$ kpc the spatial distribution of the clouds is almost statistically homogeneous. The frequency distribution $q(a)$ of cloud absorption a has a very steep decrease for $0^m3 < a < 1^m$ followed by a slight slope at $a > 1^m$. For $a < 1^m$ and $a > 1^m$ $q(a)$ can be characterized by the mean values of cloud absorption $\bar{a}_1 = 0^m26$ resp. $\bar{a}_2 = 1^m6$ with corresponding mean cloud diameters $\bar{D}_1 \approx 3$ pc resp. $\bar{D}_2 \approx 70$ pc. The mean numbers of clouds intercepted by the line of sight are found, as in the preceding paper II, to be $\nu_1 \approx 5$ kpc $^{-1}$ resp. $\nu_2 \approx 0,5$ kpc $^{-1}$.

Auf Grund von Beobachtungsdaten für rund 4700 Sterne nahe der galaktischen Ebene ($|z| < 75$ pc) wurden die Strukturfunktionen der interstellaren Absorption $A(l, b; r)$ für 5 Entfernungen von der Sonne abgeleitet (Tab. 1, Abb. 2). Ihre Deutung zeigt: Über 80% des interstellaren Staubes muß in Wolken konzentriert sein. Für $r \lesssim 1.3$ kpc ist die räumliche Verteilung der Wolken angenähert statistisch homogen. Die Häufigkeitsverteilung $q(a)$ der Wolkenabsorptionen a weist für $0^m3 < a < 1^m$ einen sehr steilen Abfall auf, der im Bereich $a > 1^m$ durch einen flachen Auslauf fortgesetzt wird. Für $a < 1^m$ und $a > 1^m$ läßt sich $q(a)$ jeweils charakterisieren durch die Mittelwerte der Wolkenabsorption $\bar{a}_1 = 0^m26$ bzw. $\bar{a}_2 = 1^m6$. Die entsprechenden mittleren Wolkendurchmesser betragen $\bar{D}_1 \approx 3$ pc bzw. $\bar{D}_2 \approx 70$ pc. Als mittlere Wolkenanzahlen auf dem Sehstrahl ergeben sich, in Übereinstimmung mit der Arbeit II, $\nu_1 \approx 5$ kpc $^{-1}$ bzw. $\nu_2 \approx 0.5$ kpc $^{-1}$.

In der Arbeit „Interstellare Absorption II“ (SCHEFFLER, 1966, im folgenden als II zitiert) ist gezeigt worden, daß die beobachteten Häufigkeitsverteilungen kleiner Farbexzesse ($E_{B-V} \leq 0^m3$) von Sternen aus engen Entfernungsintervallen um 325 pc, 515 pc, 815 pc, 1300 pc und 2050 pc mit Abständen von der galaktischen Ebene unter 75 pc befriedigend erklärt werden können durch die Annahme eines Systems statistisch homogen verteilter absorbierender Wolken, das sich nahe der galaktischen Ebene durchschnittlich bis zur Entfernung ~ 1 kpc erstreckt. Dabei bestätigte sich die Brauchbarkeit der bereits von SCHATZMAN, 1950 und MÜNCH, 1952, diskutierten Beschränkung auf (a) Wolken

mit visuellen Absorptionen $0^m2 \dots 0^m3$, von denen der Sehstrahl auf 1 kpc Weglänge im Mittel rund fünf trifft, und (b) etwa um den Faktor 10 weniger häufige Wolken mit Absorptionen oberhalb 1^m . Dies ist offenbar eine Folge davon, daß die relativen Häufigkeiten $q(a)$ der Wolken auf dem Sehstrahl mit der Absorption a für $a > 0^m25$ sehr stark abnehmen, woran sich im Bereich $a > 1^m$ ein verhältnismäßig flacher Auslauf schließt, da es Dunkelwolken mit Absorptionen von einigen Größenklassen gibt.

In der vorliegenden Untersuchung steht die Ermittlung der *linearen Ausdehnungen* dieser Wolkenstrukturen im Vordergrund. Sie bestimmen wesentlich den Charakter der Variation der bis zu einer festen Entfernung vom Beobachter r integrierten Absorption $A(l, b; r)$ über die Sphäre (l, b) galaktische Länge und Breite). Daher sind umgekehrt Aussagen zumindest über die durchschnittlichen Dimensionen und gegenseitigen Abstände der beiden hervorstechenden Wolkenarten sowie über ihre Häufigkeiten und Beiträge zur gesamten Absorption möglich durch eine Diskussion der *statistischen* Gesetzmäßigkeiten des beobachteten Verlaufes von $A(l, b; r)$ mit l und b .

Neben der Charakterisierung der durchschnittlichen Struktur $A(l, b; r)$ bei festem r durch quadratische Mittelwerte der Fourierkoeffizienten bietet sich die dazu äquivalente Bildung der Strukturfunktion an. Es wird hier der Versuch unternommen, diese Funktion für jede der eingangs angeführten mittleren Entfernungen aus den bereits in II zugrundegelegten Beobachtungsdaten abzuleiten. Das Ergebnis dient zu einer Analyse der räumlichen Wolkenstruktur des absorbierenden Mediums selbst. Dazu berechnen wir andererseits Strukturfunktionen für ein geeignet gewähltes stochastisches Modell der räumlichen Absorptionsverteilung, dessen Parameter: durchschnittliche Wolkendimensionen, -anzahlen und -absorptionen durch Anpassung der Modellrechnungen an die beobachteten Funktionsverläufe ermittelt werden. Die erhaltenen Aussagen bieten Vergleichsmöglichkeiten mit Ergebnissen über das HI-Gas und können mit als empirische Grundlagen für die Dynamik der interstellaren Materie herangezogen werden. Daneben gestattet die beobachtete Strukturfunktion fundierte Angaben über die Forderungen an den Umfang eines Beobachtungsmaterials, das zur Ableitung der individuellen Staubverteilung im galaktischen System herangezogen werden soll.

I. Strukturfunktionen der Absorptionsverteilung in der Milchstraße für verschiedene Entfernungen

1. Definition der Strukturfunktion

Im folgenden bezeichne $A(l, b; r)$ stets die *visuelle* Absorption, die das Licht von einem Punkt mit den galaktischen Polarkoordinaten (l, b, r)

auf dem Wege zum Beobachter erfährt. Wegen der starken Breitenabhängigkeit von A kann man statistisch einheitliche Verhältnisse in der zweidimensionalen Struktur $A(l, b, ; r)$ bei festem r nur erwarten innerhalb eines relativ schmalen galaktischen Gürtels, dessen Grenzen in Breite $\pm b_0$ der Bedingung $r |\sin b_0| \lesssim z_{\text{eff}}$ genügen, wobei z_{eff} die effektive Halbdicke der galaktischen Staubschicht bezeichnet. Die Untersuchung erstreckt sich daher vorwiegend auf die Variation von A mit der galaktischen Länge.

Die Ergebnisse über die statistische Homogenität des Systems absorbierender Wolken (vgl. II) lassen erwarten, daß der Verlauf $A(l)$ bei fester galaktischer Breite und fester Entfernung, soweit er durch Strukturen mit Lineardimensionen bis zu etwa 100 pc bestimmt wird, behandelt werden kann als Zufallsgröße, die sich mit wachsendem l im Sinne eines stationären stochastischen Prozesses ändert. Dann ist eine Charakterisierung möglich durch die Strukturfunktion

$$D_A(\Delta l) = \overline{[A(l + \Delta l) - A(l)]^2} = \frac{1}{L} \int_0^L [A(l + \Delta l) - A(l)]^2 dl. \quad (1)$$

Dabei ist die Mittelbildung im ersten Ausdruck über sehr viele Realisierungen des stochastischen Prozesses $A(l)$ bei festen l und Δl zu erstrecken. Da im Fall der interstellaren Absorption bei festem r nur *eine* Realisierung des Verlaufs $A(l)$ vorliegt, müssen wir statt dessen die rechts stehende zweite Definition zur Bildung von $D_A(\Delta l)$ heranziehen. Die Integration ist über ein Intervall $(0 \dots L)$ zu führen, welches sehr groß sein sollte gegenüber den längsten Strukturelementen im Verlauf $A(l)$.

Die Strukturfunktion verschwindet bei $\Delta l = 0$ und steigt für große Δl , wenn $A(l + \Delta l)$ und $A(l)$ statistisch unabhängig sind, bis zu einem Sättigungswert an. Im Zwischengebiet beginnt ein Anstieg der Kurve $D_A(\Delta l)$ mit wachsendem Δl jeweils dann, wenn Δl die Ausdehnung charakteristischer Strukturelemente von $A(l)$ erreicht. Mit $\Delta A(l) = A(l) - \bar{A}$, wobei \bar{A} den Mittelwert von A über das ganze Intervall $(0 \dots L)$ bedeutet, kann man die Differenz $A(l + \Delta l) - A(l)$ in (1) ersetzen durch $\Delta A(l + \Delta l) - \Delta A(l)$. Durch Ausmultiplizieren folgt dann

$$D_A(\Delta l) = 2 \overline{(\Delta A)^2} [1 - K_{\Delta A}(\Delta l)]. \quad (2)$$

Dabei bedeutet

$$K_{\Delta A}(\Delta l) = \frac{\overline{\Delta A(l + \Delta l) \cdot \Delta A(l)}}{(\overline{\Delta A})^2} \quad (3)$$

die Korrelationsfunktion des Verlaufs $\Delta A(l)$ mit den Eigenschaften: $K_{\Delta A}(0) = 1$ und $K_{\Delta A}(\infty) = 0$.

2. Verfahren zur Gewinnung der Strukturfunktion

Die Beobachtungsgrundlage für die Gewinnung der Strukturfunktion $D_A(\Delta l)$ bildete der von TH. NECKEL, 1966, (künftig als I zitiert) zusammengestellte, 4700 Sterne umfassende Katalog, der in II bereits zur Ableitung der Absorptionshäufigkeiten herangezogen wurde. Die Verteilung dieser Sterne entlang des galaktischen Gürtels geht aus Abb. 1 hervor. Da $A(l)$ nicht als kontinuierlicher Verlauf vorliegt, sondern durch eine begrenzte Anzahl einzelner Werte $A_j = A(l_j, b_j; r_j)$ – visuelle Absorptionswerte der beobachteten Sterne (Index j) – approximiert werden muß, kann $D_A(\Delta l)$ nicht unmittelbar nach Gl. (1) durch Integrationen von $l = 0^\circ$ bis $l = 360^\circ$ für verschiedene Δl erhalten werden. Es ist insbesondere notwendig, von vornherein Punkte (l_j, b_j) mit verschiedener Breite einzubeziehen. Als Wert der Strukturfunktion für einen bestimmten Winkelabstand φ bei fester Entfernung \bar{r} wurde deshalb gebildet

$$D_A(\varphi) = \frac{1}{N-1} \sum (A_j - A_k)^2, \quad (4)$$

wobei die Summe jeweils zu erstrecken ist über die N Sternpaare des Katalogs mit den galaktischen Koordinaten $(l_j, b_j), (l_k, b_k)$, deren Entfernungen r_j, r_k innerhalb eines bestimmten Intervalles

$$\left(\bar{r} - \frac{1}{2} \Delta r \dots \bar{r} + \frac{1}{2} \Delta r \right)$$

liegen und deren Winkelabstände an der Sphäre

$$\varphi_{jk} = \sqrt{(l_j - l_k)^2 + (b_j - b_k)^2}$$

in einen engen Bereich $\left(\varphi - \frac{1}{2} \Delta \varphi \dots \varphi + \frac{1}{2} \Delta \varphi \right)$ fallen. Den Abständen der Sterne von der galaktischen Ebene z_j, z_k wurden die beiden Bedingungen auferlegt: $|z| < 75$ pc und $|z_j - z_k| < 50$ pc. Damit wird ein Einfluß der Breitenabhängigkeit der Absorption praktisch ausgeschlossen (vgl. auch spätere Diskussion). Mit der Zulassung von Werten $|z_j - z_k| > 0$ wird bezüglich der kleinen Strukturen nicht unterschieden zwischen deren Ausdehnungen in Länge und Breite.

Die Beschränkung des Beobachtungsmaterials auf Sterne scheinbar heller als etwa $m_L = 10^m$ visuell bewirkt, daß bei größeren Entfernungen Sterne mit hohen Absorptionen gegenüber solchen mit niedrigen Absorptionen systematisch unterdrückt werden. Um die Wirkung dieses *Auswahleffektes* möglichst auszuschließen, wurden nur Sterne mit visuellen absoluten Helligkeiten $M < M_L(r, l) = m_L + 5 - 5 \log r - A_{\max}(r, l)$ zugelassen. Dabei bedeutet $A_{\max}(r, l)$ die höchste Absorption im Längenbereich des betrachteten Sternes für dessen Entfernung r . Praktisch wurde der ganze galaktische Äquator in 13 geeignet gewählte Intervalle geteilt und innerhalb jedes derselben mit (entfernungsabhängigen) mittleren Werten $A_{\max}(r, l)$ gearbeitet, die auf Grund der Untersuchung I festgelegt werden konnten.

Die gewünschte Annäherung des Funktionsverlaufs von $D_A(\varphi)$ mit variablem φ ergab sich durch Bildung der Summe (4) bei festem Entfernungsbereich für jeden der folgenden φ -Werte: $0^\circ 25$, $0^\circ 65$, $1^\circ 25$, $2^\circ 05$, $3^\circ 05$, $4^\circ 25$, $5^\circ 65$, $7^\circ 25$, $9^\circ 05$, $11^\circ 05$, $13^\circ 25$, $15^\circ 65$, $18^\circ 25$ mit den zugehörigen Intervallgrößen $\Delta\varphi = 0^\circ 3$, $0^\circ 5$, $0^\circ 7$, ... $2^\circ 7$. Diese Rechnungen wurden für jeden der fünf in Tabelle 1 angegebenen Entfernungsbereiche ausgeführt auf der Rechananlage Siemens 2002 der Universität Heidelberg. Es war dabei von Vorteil, daß die benötigten Daten für jeden Stern bereits auf einer Lochkarte gespeichert sind (vgl. I). Die Verteilung des gesamten Beobachtungsmaterials über l^{II} (Abb. 1) zeigt eine Anzahl ausgeprägter Besetzungsspitzen. An der Summe (4) werden diese Bereiche mit höherem Gewicht beteiligt als die jeweils benachbarten 5° Intervalle. Das Ergebnis für $D_A(\varphi)$ könnte daher vorwiegend die Struktur des absorbierenden Mediums im Gebiet dieser wenigen Besetzungsspitzen widerspiegeln, womit besonders im Fall einer ausgesprochenen (negativen) Korrelation zwischen Besetzung und Absorption der Wert der Aussagen stark reduziert wäre.

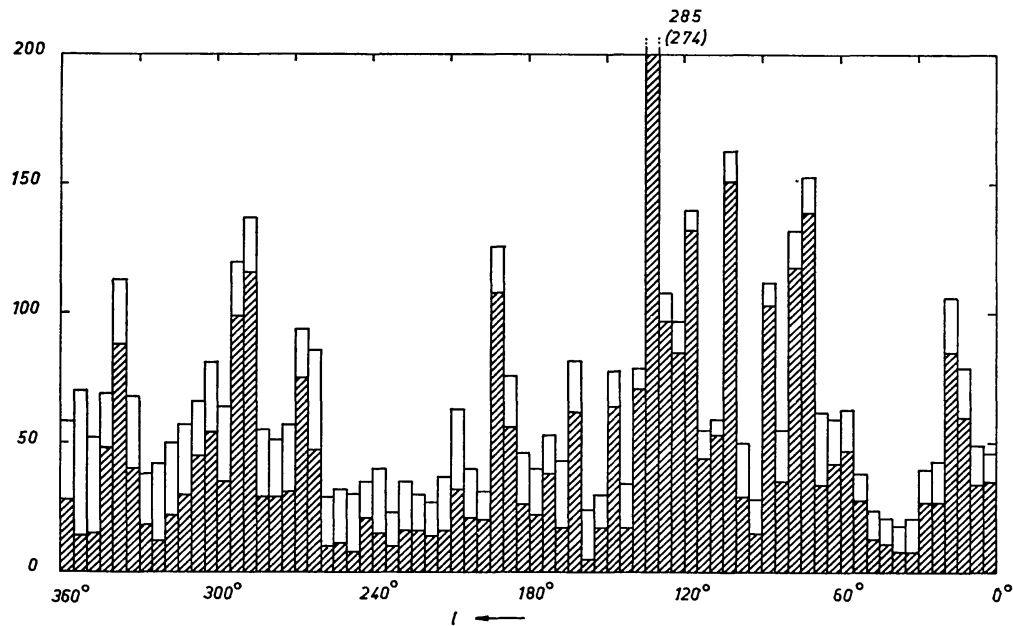


Abb. 1. Verteilung der Sterne des zugrundegelegten Beobachtungsmaterials nach galaktischer Länge. Schraffiert: Sterne mit $|b^{\text{II}}| < 7^\circ$.

Betrachtet man die Verteilung der allen gestellten Forderungen genügenden Sterne über l^{II} , so zeigt sich zunächst, daß die Besetzungsspitzen der Abb. 1 jeweils durch Sterne erzeugt werden, die nur einem oder zwei der betrachteten Entfernungintervalle angehören. Daher wird die Anzahl der extrem besetzten Intervalle ($>$ zweifacher Durchschnitt) für eine bestimmte Entfernungsgruppe auf 3 bis höchstens 7 herabgesetzt. Diese enthalten zusammen im Durchschnitt nur etwa ein

Viertel der ausgewählten Sterne. Die Berechnung der Absorptionsmittelwerte für 5° -Längenintervalle zu jeder der 5 Entfernungsgruppen zeigte darüber hinaus, daß die stark besetzten Intervalle keineswegs generell Absorptionswerte unterhalb des jeweiligen Mittelwertes ($\bar{A}(\bar{r})$ in Tabelle 1) aufweisen.

Tabelle 1. Für die Ableitung der Strukturfunktionen gewählte Entfernungsintervalle, mittlere Entfernungen \bar{r} , Anzahlen der allen gestellten Bedingungen genügenden Sterne, durchschnittliche Anzahlen der Sternpaare N für eine Winkeldistanz φ sowie Mittelwerte und Streuungen der visuellen Absorptionen bei diesen Entfernungen.

Entfernungsintervall	\bar{r}	Anzahl der Sterne	N	$\bar{A}(\bar{r})$	$\sigma_A(\bar{r})$
250 ... 400pc	325pc	263	340	0 ^m 42	0.42
400 ... 630	515	158	120	0.92	0.91
630 ... 1000	815	170	90	1.62	1.15
1000 ... 1600	1300	247	230	2.22	1.18
1600 ... 2500	2050	254	230	2.24	1.04

3. Ergebnisse und qualitative Diskussion

Aus Tabelle 1 gehen die Anzahlen der pro Entfernungsintervall verfügbaren Sterne hervor, die sämtlichen gestellten Bedingungen genügen. Sie enthält außerdem die durchschnittlichen Anzahlen der Sternpaare N für eine Winkeldistanz φ und die unabhängig von der Summation (4) berechneten Mittelwerte \bar{A} und Streuungen $\sigma_A = \sqrt{(\overline{A - \bar{A}})^2}$ für jedes Entfernungsintervall. Die Ergebnisse für die Strukturfunktionen zeigt Abb. 2.

Als Grenzwerte der Kurvenzüge für große φ sind die Beträge $2\sigma_A^2$ nach Tabelle 1 eingezeichnet. Daß der Streuungswert für das letzte Entfernungsintervall etwas niedriger ist als für das vorletzte, ist wahrscheinlich eine Folge restlichen Auswahleffektes bei Entfernungen oberhalb 1.6 kpc. Die Werte $A_{\max}(r, l)$ waren dort im Durchschnitt etwas niedriger angesetzt worden als sich aus den Absorptions-Entfernungsdiagrammen NECKELS (I) ergibt, um die verbleibenden Sternzahlen nicht zu klein werden zu lassen. Hierdurch kann bei dieser großen Entfernung eine geringfügige Kompression der Ordinatenkala im Bereich großer Werte $D_A(\varphi)$ entstehen.

Die zufälligen Beobachtungsfehler der zugrundeliegenden Farbexzesse bedingen in $D_A(\varphi)$ einen konstanten Streuungsanteil $2(\overline{\delta A})^2$. Da $\sqrt{(\overline{\delta A})^2}$ nicht wesentlich über $\pm 0^m1$ liegt, erübrigt sich der Abzug des Beitrages $2(\overline{\delta A})^2$.

Das auffällige Charakteristikum der erhaltenen Strukturfunktionen ist die Stufenbildung zwischen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 2^\circ$ auf die erst im Bereich

$\varphi = 2^\circ \dots 4^\circ$ (bei $\bar{r} = 325$ pc für $\varphi > 6^\circ$) ein weiterer Anstieg folgt. Nur für das letzte Intervall ist die „Stufe“ nicht ausgeprägt, was aber leicht als zufällige Abweichung z. B. allein des Wertes $D_A(\varphi)$ für $\varphi = 0.65$ zustandekommen könnte. Die Frage der Realität der Überhöhungen jeweils am Anfang der Stufen wird an späterer Stelle diskutiert.

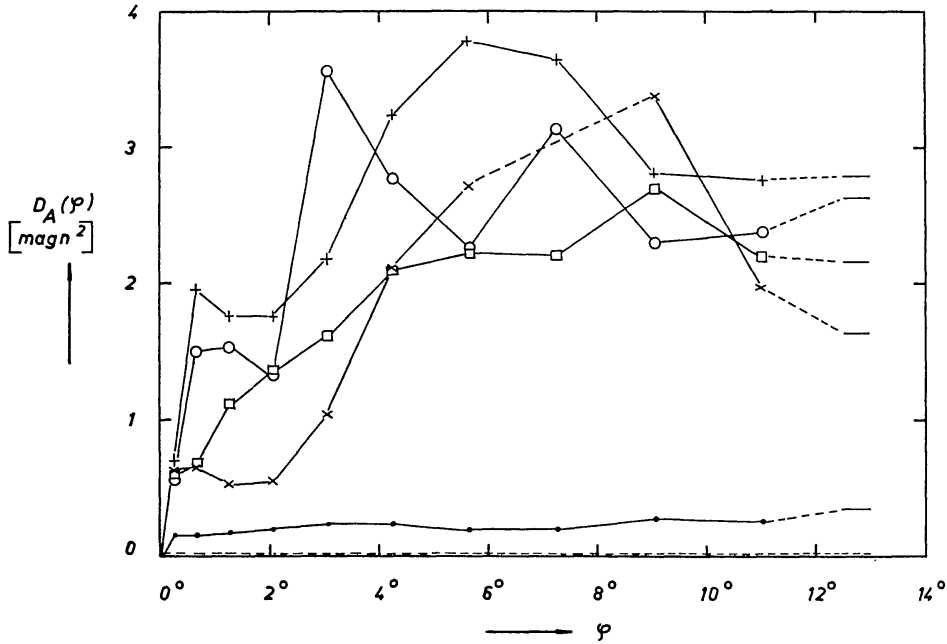


Abb. 2. Strukturfunktionen $D_A(\varphi)$ der Absorption $A(l, b, \bar{r})$ für fünf feste Entfernungen \bar{r} : 325 pc (\cdot), 515 pc (\times), 815 pc (\circ), 1300 pc ($+$), 2050 pc (\square) unter Beschränkung auf den Bereich $|z| < 75$ pc und Differenzen $|\Delta z| < 50$ pc. Erläuterungen vgl. Text.

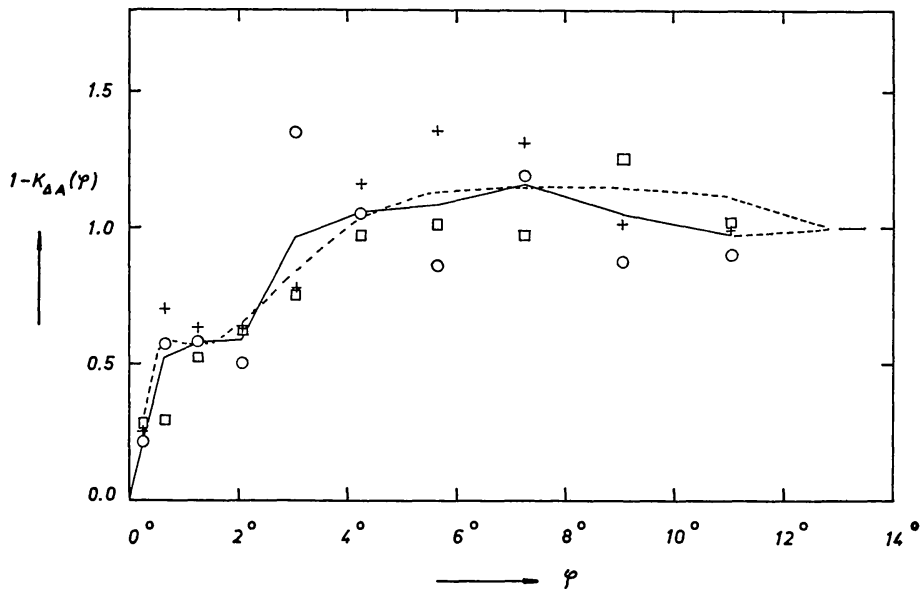


Abb. 3. Normierte Strukturfunktionen $D_A(\varphi)/2\sigma_A^2$ nach Abb. 2 für $\bar{r} = 815$ pc (\circ), $\bar{r} = 1300$ pc ($+$) und $\bar{r} = 2050$ pc (\square). Die ausgezogene Kurve verbindet die Mittelwerte der drei zu jeder betrachteten Winkeldifferenz φ gefundenen Ordinaten. Die gestrichelte Kurve wird im Abschnitt II erläutert.

Die Ähnlichkeit der Kurvenzüge tritt besonders deutlich hervor, wenn man sie auf den Sättigungswert I normiert. Abb. 3 zeigt die Punkte $D_A(\varphi)/2\sigma_A^2 = 1 - K_{AA}(\varphi)$ für die drei letzten Entfernungintervalle zusammen mit einem Kurvenzug (ausgezogen) durch die Mittelwerte. Der steile Anstieg bei $\varphi \lesssim 0.25^\circ$ mit nachfolgender Sättigungstendenz bis $\varphi \approx 2^\circ$ ist qualitativ in Übereinstimmung mit dem Ergebnis, das SERKOWSKI, 1958, im Bereich des Doppel-Sternhaufens h und χ Per für $\varphi \leq 1.1$ fand. Diese Teile der Strukturfunktionen werden durch kleine Strukturen mit Winkelausdehnungen $\lesssim 0.25^\circ$ erzeugt. Der zweite Anstieg erfordert hingegen Wolken mit starker Absorption, deren Winkelausdehnungen 3° oder mehr betragen. Die Kurvenverläufe dürften daher einfach eine Folge des in der Einleitung beschriebenen Verlaufs der Häufigkeiten der Wolkenabsorptionen $q(a)$ in Verbindung mit einer positiven Korrelation zwischen a und den Wolkendurchmessern sein.

Die Voraussetzung, daß die Ausdehnungen der Strukturelemente des Verlaufs $A(l)$ sehr klein sind gegenüber dem gesamten Längenbereich $0 \dots L = 360^\circ$, über den die Integration in (1) erstreckt werden kann, ist für große Wolken mit Winkelausdehnungen von $3^\circ \dots 5^\circ$ weniger gut erfüllt als für die kleinen Strukturen. Daher ist die größere Streuung der abgeleiteten Werte $D_A(\varphi)$ für $\varphi \gtrsim 3^\circ$ nicht überraschend.

Völlig außerhalb des Streubereichs fällt nur der Betrag der Strukturfunktion für das zweite Entfernungintervall bei $\varphi = 7.25^\circ$. Der entsprechende Punkt wurde ausgeschlossen, nachdem sich ergeben hatte, daß hier zufällig ein Stern bei $l^m = 80^\circ$ der die extrem hohe Absorption $A_j = 6^m17$ erfährt, mit jedem Mitglied einer Gruppe von 8 eng beieinander stehenden Sternen kleiner Absorption ($A_k \leq 0^m37$) um $l^m = 87^\circ$ kombiniert wird. Die außergewöhnlich große Differenz $A_j - A_k \approx 6^m$ geht daher 8 mal quadratisch in die Summe (4) ein, die in diesem Fall aus $N = 77$ Gliedern besteht. Daß entsprechende Konstellationen im übrigen keinen verbürgbaren Einfluß auf die in Abb. 2 niedergelegten Ergebnisse haben, zeigten Rechnungen, bei denen durch geeignete Programmierung Kombinationen zwischen Einzelsternen und engen Sterngruppen nur mit einfachem Gewicht eingehen, wodurch eine noch bessere Annäherung an die Rechenvorschrift der rechten Seite von Gl. (1) erreicht wird.

NECKELS (I) Wert für die effektive Halbdicke der galaktischen Absorptionsschicht von nur etwa 40 pc läßt die Frage aufkommen, wie weit der Anstieg von $D_A(\varphi)$ für $\varphi > 2^\circ$ und der Betrag des Sättigungswertes $2\sigma_A^2$ bedingt sind durch den Abfall der mittleren Staubdichte mit wachsendem Abstand $|z|$ von der galaktischen Ebene. Würden Sternpaare, deren Winkelabstand φ_{jk} nahezu gleich ihrer Breitendifferenz ist, mit großem Gewicht eingehen, dann sollte der zweite Anstieg der $D_A(\varphi)$ -Kurven merklich einsetzen bei Winkeln $\varphi = \varphi^*$, die gegeben sind durch $tg \varphi^* \approx 40/\bar{r}$. Für $\bar{r} = 325$ pc, ..., $\bar{r} = 2050$ pc erhält man $\varphi^* = 7.0^\circ, 4.5^\circ, 2.8^\circ, 1.8^\circ, 1.1^\circ$. Demgegenüber zeigen die Kurvenzüge der Abb. 2

5*

keinen verbürgbaren systematischen Gang der Lage ihres zweiten Anstieges mit der Entfernung. Um genauer zu prüfen, wie weit die entscheidenden Züge der in Abb. 2 dargestellten Ergebnisse bedingt sein können durch die Breitenabhängigkeit der Absorption, wurden alle Rechnungen wiederholt unter den weiter einschränkenden Bedingungen: $|z_j - z_k| < 20$ pc und $|z| < 50$ pc. Die Resultate (Abb. 4) zeigen, daß ein derartiger Einfluß nicht vorliegt. Die durchschnittliche Anzahl der Sternpaare N , die für einen Punkt $D_A(\varphi)$ verfügbar ist, beträgt nun

Tabelle 2. *Mittelwerte und Streuungen der visuellen Absorptionswerte für Sternpaare mit $|z_j - z_k| < 20$ pc und $|z| < 50$ pc*

\bar{r}	$\bar{A}(\bar{r})$	$\sigma_A(\bar{r})$
325 pc	0 ^m 44	0.38
515	0.96	0.93
815	1.72	1.20
1300	2.28	1.22
2050	2.34	1.09

– außer bei der ersten Entfernungsgruppe – nur noch $1/4$ bis $1/2$ der in Tabelle 1 gegebenen Zahlen, so daß die größere Streuung bei $\varphi > 2^\circ$ nicht überrascht. Für die Mittelwerte $\bar{A}(\bar{r})$ und Streuungen $\sigma_A(\bar{r}) = \sqrt{(\bar{A} - \bar{A})^2}$ ergeben sich die in Tabelle 2 wiedergegebenen Zahlen.

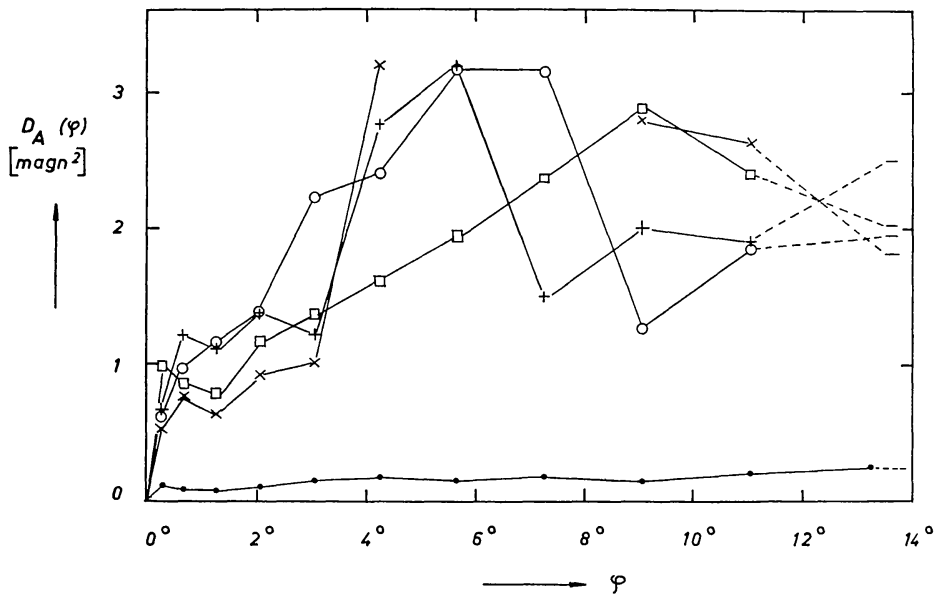


Abb. 4. Strukturfunktionen $D_A(\varphi)$ der Absorption $A(l, b, \bar{r})$ für fünf feste Entfernungen \bar{r} : 325 pc (\cdot), 515 pc (\times), 815 pc (\circ), 1300 pc ($+$), 2050 pc (\square) unter Beschränkung auf den Bereich $|z| < 50$ pc und Differenzen $|z_j - z_k| < 20$ pc. Erläuterungen vgl. Text.

Die Differenzen zwischen den Ergebnissen beider Rechnungen für ein einzelnes Entfernungsintervall sind zu geringfügig, um verbürgbar zu erscheinen. Der schwache systematische Unterschied zwischen den \bar{A} und σ_A der ersten und zweiten Rechnung kann indessen keine Folge statistischer Schwankungen sein. Er drückt offenbar die Zunahme der

durchschnittlichen Absorptionsbeträge mit weiterer Annäherung an die galaktische Ebene aus. Nimmt der interstellare Absorptionskoeffizient mit wachsendem Abstand von der galaktischen Ebene z ab gemäß $\exp\{-|z|/z_1\}$ und rechnet man für $|z| < 75$ pc mit z -unabhängiger Stern-dichte, so ergibt sich zu $z_1 = 50$ pc als Unterschied zwischen den Mittel-werten \bar{A} (\bar{r}) aus den Gebieten $|z| < 50$ pc bzw. $|z| < 75$ pc unabhängig von r rund 10%. Die Differenzen zwischen den \bar{A} der Tabellen 1 und 2 betragen maximal 6%, sind allerdings nicht genügend sicher, um eine unabhängige Bestimmung von z_1 zu ermöglichen. Da die Absorption für einen Stern mit $|z| < 50$ pc effektiv ungefähr bei $\frac{1}{2}z$ entsteht, kann durch eine noch stärkere Einschränkung der zugelassenen Abstände z keine nennenswerte weitere Zunahme der \bar{A} und σ_A auftreten. Gegen die Bevorzugung der auf größeren Sternzahlen basierenden ersten Rechnung ergibt sich daher kein Einwand.

Abschließend sei noch ergänzt, daß die Strukturfunktion die Grundlage bilden kann zur Beantwortung der Frage nach der Streuung $\sigma_A(f)$ der Absorptionswerte A bei festem r innerhalb eines Bereichs der Sphäre von vorgegebener Ausdehnung $f = \Delta l \cdot \Delta b$. Die Größe $\sigma_A(f)$ gibt die Unsicherheit an, mit der Aussagen über den durchschnittlichen Absorp-tionsverlauf behaftet sind, wenn jeweils nur ein Stern innerhalb einer Fläche f verfügbar ist („Auflösung“ = \sqrt{f}).

Es gilt

$$\sigma_A^2(f) = \frac{1}{f} \left\langle \int_{l-\frac{1}{2}\Delta l}^{l+\frac{1}{2}\Delta l} \int_{b-\frac{1}{2}\Delta b}^{b+\frac{1}{2}\Delta b} [A(l, b) - \bar{A}_f]^2 dl db \right\rangle_m$$

mit

$$\bar{A}_f = \frac{1}{f} \int_{l-\frac{1}{2}\Delta l}^{l+\frac{1}{2}\Delta l} \int_{b-\frac{1}{2}\Delta b}^{b+\frac{1}{2}\Delta b} A(l, b) dl db.$$

Dabei bedeutet das Symbol $\langle \quad \rangle_m$ die Mittelbildung über sehr viele Realisierungen des innerhalb der Klammer stehenden Ausdruckes. Nach einiger Rechnung findet man im Fall $\Delta b = \Delta l$

$$\sigma_A^2(f) = \sigma_A^2 \left[1 - \frac{4}{(\Delta l)^4} \int_0^{\Delta l} \int_0^{\Delta l} (\Delta l - \xi)(\Delta l - \eta) K_{\Delta\Delta}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right].$$

Für $\Delta l \rightarrow 0$ folgt $\sigma_A(f) \rightarrow 0$; für $\Delta l \rightarrow \infty$ erhält man $\sigma_A(f) = \sigma_A$. Mit einem etwas schematisierten Ansatz für $K_{\Delta\Delta}(\xi, \eta)$ nach Abb. 3 erhält man z. B. für $\Delta l = 5^\circ$: $\sigma_A^2(f) = 0.72 \sigma_A^2$. Zu $r \approx 1$ kpc folgt nach Tabelle 1 $\sigma_A = 1.16$ und somit $\sigma_A(\Delta l = 5^\circ) \approx 1.00$.

II. Interpretation der beobachteten Strukturfunktionen

1. Zusammenhang mit der Struktur der Staubverteilung

Für die Deutung der empirischen Strukturfunktionen durch ein stochastisches Modell der räumlichen Anordnung des absorbierenden Materials ist es mathematisch bequem, die Variation des Absorptionskoeffizienten pro Längeneinheit $\kappa(\mathbf{r})$ mit den Raumkoordinaten (\mathbf{r}) zunächst allgemein durch eine Korrelationsfunktion zu beschreiben. Da wir $D_A(\varphi)$ als Strukturfunktion des Verlaufes $A(l; r)$ ansehen, genügt es, unter Voraussetzung statistischer Homogenität, den zweidimensionalen Fall zu betrachten:

$$K_{\Delta\kappa}(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = \frac{\overline{\Delta\kappa(x_1, y_1) \Delta\kappa(x_2, y_2)}}{(\overline{\Delta\kappa})^2} \quad (5)$$

mit $\Delta\kappa(x, y) = \kappa(x, y) - \bar{\kappa}$, $\overline{\Delta\kappa} = 0$ und $\overline{(\Delta\kappa)^2} = \text{const.}$

Dabei sind die Mittelbildungen über sehr viele Realisierungen des stochastischen Modells für $\Delta\kappa(x, y)$ bzw. – bei einer einzigen Realisierung von $\Delta\kappa(x, y)$ – über ein hinreichend ausgedehntes zweidimensionales Gebiet zu erstrecken.

Für den Zusammenhang zwischen $K_{\Delta\kappa}(\xi, \eta)$ und $K_{\Delta A}(\varphi)$ (vgl. Darstellung der Strukturfunktion (2)) hat bereits SERKOWSKI, 1958, einen Näherungsausdruck abgeleitet. Die in dieser Beziehung auftretenden Integrationen sind jedoch bei der gebräuchlichen Verwendung von quadratischen Exponentialfunktionen für $K_{\Delta\kappa}(\xi, \eta)$ nicht mehr durch endliche Kombinationen bereits tabulierter Funktionen darstellbar. Diesen Nachteil vermeidet der im Anhang 1 abgeleitete Integralausdruck:

$$K_{\Delta A}(\varphi) = \int_0^{\bar{r}} dr \int_0^{\infty} d\xi K_{\Delta\kappa}(\xi, r\varphi) \Big| \bar{r} \int_0^{\infty} d\xi K_{\Delta\kappa}(\xi, 0), \quad (6)$$

der für kleine Winkel φ (etwa $\varphi < 10^\circ$) und Strukturen mit Ausdehnungen $\ll \bar{r}$ eine ausreichende Näherung darstellt.

Die Annahme einer Verteilung der Wolkenabsorptionen, die durch zwei Wolkentypen mit Absorptionen und Lineardimensionen in zwei verhältnismäßig weit voneinander getrennten Größenordnungen approximiert werden darf, entspricht der Aufspaltung des Absorptionskoeffizienten in zwei *nicht* miteinander korrelierte Anteile: $\Delta\kappa(x, y) = \Delta\kappa_1(x, y) + \Delta\kappa_2(x, y)$. Die Definitionsgleichung (5) führt damit auf

$$K_{\Delta\kappa}(\xi, \eta) = \frac{(\overline{\Delta\kappa_1})^2}{(\overline{\Delta\kappa})^2} K_{\Delta\kappa_1}(\xi, \eta) + \frac{(\overline{\Delta\kappa_2})^2}{(\overline{\Delta\kappa})^2} K_{\Delta\kappa_2}(\xi, \eta).$$

Substitution dieses Ausdrucks in (6) und Elimination der $\overline{(\Delta\kappa_j)^2}$ durch Einführung der Streuungsanteile der beiden Wolkensorten ($j = 1, 2$)

$$\sigma_{\Delta A_j}^2 = \overline{(\Delta A_j)^2} = 2 \overline{(\Delta\kappa_j)^2} \cdot \bar{r} \int_0^{\infty} d\xi K_{\Delta\kappa_j}(\xi, 0) \quad (7)$$

(vgl. Anhang 1) ergibt

$$K_{\Delta\Delta}(\varphi) = \frac{\sigma_{\Delta 1}^2}{\sigma_{\Delta}^2} K_{\Delta\Delta 1}(\varphi) + \frac{\sigma_{\Delta 2}^2}{\sigma_{\Delta}^2} K_{\Delta\Delta 2}(\varphi).$$

Die $K_{\Delta\Delta j}(\varphi)$ sind mit den $K_{\Delta\kappa j}(\xi, \eta)$ jeweils durch (6) verknüpft. Für die auf den Sättigungswert 1 normierte Strukturfunktion erhält man schließlich die Darstellung

$$\frac{D_{\Delta}(\varphi)}{2\sigma_{\Delta}^2} = 1 - K_{\Delta\Delta}(\varphi) = \alpha [1 - K_{\Delta\Delta 1}(\varphi)] + (1 - \alpha) [1 - K_{\Delta\Delta 2}(\varphi)] \quad (8)$$

mit den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{\sigma_{\Delta 1}^2}{\sigma_{\Delta}^2}, \quad 1 - \alpha = \frac{\sigma_{\Delta 2}^2}{\sigma_{\Delta}^2}. \quad (9)$$

Die beiden Summanden in Gl. (8) bedeuten die Überlagerung zweier „Stufen“, wenn der zweite Summand einen Anstieg auf merkliche endliche Werte erst bei wesentlich größeren Winkel φ aufweist als der erste.

Um auch die beobachteten Überhöhungen der Stufen gegenüber den jeweiligen Sättigungswerten darstellen zu können, müssen die Korrelationsfunktionen $K_{\Delta\kappa j}(\xi, \eta)$ mit wachsendem Abstand $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ zunächst bis zu negativen Werten abnehmen. Wir wählen deshalb für beide Anteile $\Delta\kappa_j(x, y)$ den (isotropen) Ansatz

$$K_{\Delta\kappa j}(\xi, \eta) = K_{\Delta\kappa j}(\varrho) = e^{-\frac{\varrho^2}{l_j^2}} \left\{ 1 - \beta_j \frac{\varrho^2}{l_j^2} \right\} \quad (10)$$

mit $\varrho^2 \approx \xi^2 + r^2\varphi^2$. Abb. 5 erläutert *schematisch* für den eindimensio-

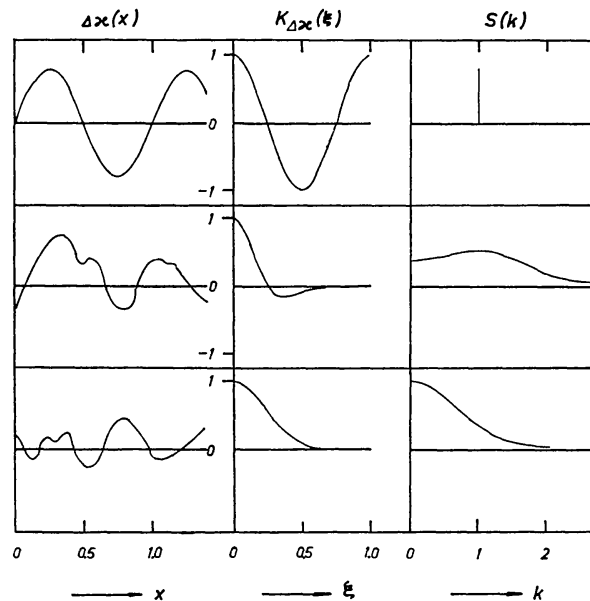


Abb. 5. Schematische Darstellung des Zusammenhanges zwischen einer vorgegebenen eindimensionalen Struktur $\Delta\kappa(x)$ und der zugeordneten Korrelationsfunktion $K_{\Delta\kappa}(\xi)$ bzw. ihrem Spektrum $S(k)$ (k = räumliche Wellenzahl). Oben: Streng periodische Abhängigkeit von x . Mitte: durch unregelmäßige Störungen stark deformierter periodischer Verlauf. Unten: vollständig unregelmäßige Struktur mit Fluktuationen, deren Linearausdehnungen $\Delta x \gtrsim 1$.

nen Fall, daß (10) einen Verlauf $\Delta\kappa(x, y)$ beschreibt (Mitte), der zwischen den beiden Extremfällen liegt: strenge Periodizität mit Wellenlänge $\Lambda = 1$, $\Delta\kappa(x) = \sin 2\pi x$, $K_{\Delta\kappa}(\xi) = \cos 2\pi\xi$ (oben) und vollständige Unregelmäßigkeit mit Wellenlängen oberhalb $\Lambda \approx \pi l = 1$: $K_{\Delta\kappa}(\xi) = \exp\{-\xi^2/l^2\} = \exp\{-\pi^2\xi^2\}$ (unten).

Negative Korrelationswerte können ein Zeichen für das Auftreten relativ scharf begrenzter Wolken mit nur mäßig streuenden Durchmessern sein. Die Fourierdarstellung

$$\Delta\kappa(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(k) e^{i2\pi kx} dk$$

vieler Realisierungen des stochastischen Prozesses $\Delta\kappa(x)$ und Bildung des räumlichen *Spektrums* $S(k) \sim \overline{|B(k)|^2}$ durch quadratische Mittelung ($k = \text{Wellenzahl} = 1/\text{Wellenlänge}$) bietet eine äquivalente Beschreibung. $S(k)$ und $K_{\Delta\kappa}(\xi)$ sind selbst gegenseitig Fouriertransformierte. Der Ansatz (10) führt im eindimensionalen Fall für $l = 1/\pi$ und $\beta = 1$ auf das Spektrum $S(k) \sim \left(1 + \frac{2}{3}k^2\right) \exp(-k^2)$. In Abb. 5 ist $S(k)$ jeweils rechts dargestellt. Aus dem unteren Teil der Abb. 5 ersieht man ferner, daß der Ansatz $K_{\Delta\kappa}(\xi) = \exp\{-\xi^2/l^2\}$ einen Verlauf $\Delta\kappa(x)$ beschreibt, in dem Wellen der Längen $1/k = \Lambda < \pi l$ praktisch nicht vorkommen.

Mit dem Ansatz (10) liefern die Integrationen in (6)

$$K_{\Delta A_j}(\varphi) = \left\{ \sqrt{\pi} (1 - \beta_j) \frac{1}{\psi_j} \Phi(\psi_j \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \beta_j e^{-\psi_j^2} \right\} / \left\{ 1 - \frac{1}{2} \beta_j \right\}. \quad (11)$$

Dabei ist abgekürzt

$$\psi_j = \frac{\bar{r}\varphi}{l_j} \quad (12)$$

und

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

2. Strukturparameter der Staubverteilung

Da β_j und α einerseits und l_j andererseits nur sehr schwach gekoppelt sind, lassen sich verhältnismäßig leicht Werte dieser Parameter finden, mit denen eine optimale Darstellung der beobachteten Strukturfunktionen im Rahmen der Möglichkeiten des Ansatzes (10) erreicht wird. Die untereinander ähnlichen Verläufe von $D_A(\varphi)/2\sigma_A^2$ für die drei letzten Entfernungsintervalle erfordern $\beta_1 \approx 1.5$, $\beta_2 \approx 1.2$, $\alpha = 0.30$, $l_1 = \bar{r}/160$ und $l_2 = \bar{r}/16$. Der entsprechende theoretische Kurvenverlauf, berechnet nach den Gln. (8) und (11), ist in Abb. 3 gestrichelt eingetragen. Wegen der Streuung der beobachteten Punkte würde eine vollständige Anpassung an die Mittelwerte für die drei Entfernungsintervalle, die nur durch Übergang zu einem modifizierten Ansatz möglich wäre, keine echte Verbesserung bedeuten.

Die angenäherte Übereinstimmung der normierten Strukturfunktionen für $\bar{r} = 815$ pc, 1300 pc und 2050 pc kann entweder bedeuten, daß die l_j proportional zur Entfernung wachsen oder eine Folge davon sein, daß die Wolkenschicht sich nicht wesentlich über $r = 815$ pc hinaus erstreckt. Für \bar{r} wäre dann die kleinste der drei Entfernungen bzw. ein Wert zwischen 815 pc und 1300 pc einzusetzen. Nach den Ergebnissen der beiden Arbeiten I und II ist gerade der zweite Fall zu erwarten. Für eine statistisch homogene Verteilung der *großen* Wolken bis zu Entfernungen von mindestens ~ 2 kpc müßte die zweite „Stufe“ der Strukturfunktion beim fünften Entfernungsintervall in den Bereich $\varphi = 1^\circ \dots 2^\circ$ statt wie beobachtet $\varphi = 2^\circ \dots 4^\circ$ fallen. Mit einer effektiven Entfernung $\bar{r} = 1$ kpc folgt $l_1 \approx 6$ pc, $l_2 \approx 60$ pc.

Durch die Zusammenfassung der Sternpaare mit Winkeldistanzen $\varphi = 0^\circ.1 \dots 0^\circ.4$ zu einem Punkt bei $\varphi = 0^\circ.25$ wird der Anstieg von $D_A(\varphi)$ für die drei äußeren Entfernungen im Bereich $\varphi < 0^\circ.65$ zweifellos abgeflacht wiedergegeben. Daher stellt $l_1 \approx 6$ pc allenfalls einen oberen Grenzwert dar. Die Lage des ersten Anstiegs von $D_A(\varphi)$ für die beiden Entfernungen $\bar{r} = 325$ pc und 515 pc ergibt mit (11) und (12) $l_1 \approx 2$ pc. Gleichen Winkeldistanzen entsprechen bei kleineren Entfernungen kleinere lineare Abmessungen, daher dürfte dieser Wert der Wahrheit näher kommen. Es handelt sich aber auch hier noch um eine obere Grenze für l_1 . Der von SERKOWSKI, 1958, für das Gebiet von h und χ Per bei wesentlich höherer Winkelauflösung gefundene Wert $l_1 = 1.75$ pc stimmt gut mit diesem Resultat überein, stellt jedoch, wegen der dort eingehenden Annahme eines Maximalwertes für die Schichtdicke, ebenfalls einen Höchstwert dar.

3. Wolkenabsorptionen und Wolkendurchmesser

Wenn die durch l_1 und l_2 charakterisierten Strukturen identifiziert werden dürfen mit den Wolken geringer bzw. starker Absorption, so muß insbesondere das angenommene Verhältnis α (in Verbindung mit den Werten von \bar{A} und σ_A) mit der Annahme von etwa 5 Wolken mit je $0^m.2 \dots 0^m.3$ Absorption auf 1 kpc des Sehstrahls verträglich sein. Bezeichnen \bar{a}_1 und \bar{a}_2 die repräsentativen Mittelwerte der Absorptionen der Einzelwolken beider Gruppen und λ_1 bzw. λ_2 die entsprechenden mittleren Wolkenzahlen auf dem Sehstrahl bis zur Entfernung \bar{r} , dann gelten im Bereich statistischer Homogenität zunächst die beiden Gleichungen

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 = \bar{A} \quad (13)$$

$$\lambda_1 \bar{a}_1^2 + \lambda_2 \bar{a}_2^2 = \sigma_A^2. \quad (14)$$

Die in II (Tabellen 2 u. 3) gewonnenen Ergebnisse für λ_1 bedeuten eine weitere Relation der Form

$$\lambda_1 = \lambda_1(\bar{a}_1). \quad (15)$$

Die mit der Deutung der Strukturfunktionen erhaltenen Aussagen über das Verhältnis $\sigma_{A1}^2/\sigma_A^2 = \alpha$ liefern schließlich eine vierte Gleichung:

$$\frac{\lambda_1 \bar{a}_1^2}{\lambda_1 \bar{a}_1^2 + \lambda_2 \bar{a}_2^2} = \alpha. \quad (16)$$

Damit wird es möglich, die Werte der vier Parameter \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , λ_1 , λ_2 ohne zusätzliche Annahmen für jedes der fünf Entfernungsintervalle zu bestimmen.

Praktisch wurde zunächst ein Näherungswert für \bar{a}_1 angenommen, dazu durch Interpolation zwischen den Angaben der Tabellen 2 und 3 der Arbeit II für das betreffende Entfernungsintervall ein Wert λ_1 ermittelt und hiernach gemäß Gl. (14) und Gl. (16) $\lambda_1 \bar{a}_1^2/\alpha$ berechnet. Durch Variation von \bar{a}_1 ließ sich die richtige Lösung leicht finden, mit der sich der beobachtete Betrag σ_A^2 (Tabelle 1) einstellt – korrigiert wegen des Einflusses der endlichen Intervallgröße Δr durch Subtraktion des stets geringfügigen Terms $\frac{1}{12} \bar{A}^2 \left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^2$ nach MÜNCH, 1952. Hiernach folgen \bar{a}_2 und λ_2 unmittelbar aus den Gln. (13) und (14). Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 enthalten. Anstelle der λ_j sind die mittleren Wolkenzahlen auf dem Sehstrahl pro 1 kpc Weglänge $\nu_j = \lambda_j/\bar{r}$ angegeben (i = Entfernungsindex).

Tabelle 3. Ergebnisse für die Mittelwerte der Einzelwolkenabsorptionen \bar{a}_1 und \bar{a}_2 beider Gruppen und zugehörige mittlere Wolkenzahlen im Sehstrahl pro 1 kpc ν_1 , ν_2 , abgeleitet aus den Strukturfunktionen für verschiedene Entfernungsintervalle (Index i). Die beiden letzten Zeilen geben die Verhältnisse der Beiträge beider Wolkensorten zu den mittleren Absorptionswerten \bar{A} und deren Streuungen σ_A

i	1	2	3	4	5
α	0.40	0.20	0.30	0.30	0.30
\bar{a}_1	0 ^m 20	0 ^m 26	0 ^m 36	0 ^m 27	0 ^m 23
\bar{a}_2	1 ^m 69	2 ^m 03	1 ^m 40	1 ^m 14	1 ^m 82
ν_1	5.5	4.6	3.5	5.3	5.5
ν_2	0.12	0.30	0.53	0.53	0.22
\bar{A}_2/\bar{A}_1	0.18	0.51	0.60	0.55	0.30
σ_{A2}/σ_{A1}	1.23	2.0	1.53	1.53	1.53

Für die ν_j des fünften Entfernungsintervalles ist dabei $\bar{r} = 1300$ pc statt $\bar{r}_5 = 2050$ pc gewählt worden; außerdem wurden dort die \bar{A} und σ_A^2 des vierten Entfernungsintervalles zugrundegelegt, weshalb Unterschiede gegenüber diesem nur infolge der Verwendung eines anderen Wertes λ_1 entstehen.

Berücksichtigt man, daß die statistischen Voraussetzungen dieser Diskussion nur angenähert erfüllt sein werden, so erscheint die Homogenität der Ergebnisse befriedigend. Sie sind auch konsistent mit den Re-

sultaten der Analyse der Absorptionsverteilungen in II. Zu den beiden Wolkengruppen, deren Absorptionsbeträge nach Tabelle 3 im Durchschnitt bei $\bar{a}_1 \approx 0^m26$ und $\bar{a}_2 \approx 1^m6$ liegen, gehören demnach sehr verschiedene effektive Lineardimensionen. Die beobachteten Absorptionswerte A werden im Durchschnitt zum überwiegenden Teil von den kleinen Wolken geliefert, während ihre große Streuung vor allem auf die Wirkung der relativ seltenen großen Wolken zurückgeht.

Die Streuung der absoluten Helligkeiten der Sterne eines bestimmten MKK-Spektraltyps um ihren Mittelwert bewirkt, daß die effektiven \bar{r}_i systematisch größer sind als die in Tabelle 1 angegebenen Werte. Von den in Tabelle 3 zusammengestellten Daten können hiervon nur die ν_j (nicht die λ_j) betroffen werden. In II ist eine Dehnung der r -Skala um den Faktor ≈ 1.25 abgeschätzt worden. Wegen der Unsicherheit des für die drei letzten Entfernungintervalle anzusetzenden wirklichen Wertes \bar{r} , der vor allem in die Bestimmung der l_j eingeht, wurde von einer Korrektur der Entfernungen ganz abgesehen.

Ein Anteil interstellaren Staubes mit räumlich praktisch konstanter Dichte würde sich in der Strukturfunktion $D_A(\varphi)$ nicht bemerkbar machen, ergäbe jedoch auf der linken Seite der Gl. (13) einen zusätzlichen Term $A_0 = a_0 \cdot r$. Die Unsicherheiten der obigen Diskussion lassen natürlich einen kleinen Anteil A_0 zu, der sich mit zunehmender Entfernung stärker bemerkbar machen müßte. Für das Entfernungintervall $i = 4$ hätte man sicher $A_0 < 0^m5$, also $a_0 < 0^m4 \text{ kpc}^{-1}$ anzusetzen. Eine bessere Abschätzung erlauben die beobachteten Häufigkeiten $N(A, \bar{r}_i)$ der Absorptionswerte (vgl. II, Abb. 1). Der konstante Anteil A_0 an der gesamten visuellen Absorption A würde eine Verschiebung der Verteilung $N(A, \bar{r}_i)$ auf der Abszisse um den Betrag A_0 ergeben. Die beobachteten $N(A, \bar{r}_i)$ für $i = 1$ und $i = 2$ zeigen, daß $A_0 < 0^m2$, also $a_0 < 0^m4 \text{ kpc}^{-1}$ sein muß. Die Existenz einiger kleiner Bereiche an der Sphäre mit nahezu vollständiger Durchsichtigkeit bis zu Entfernungen von mehreren kpc läßt indessen noch weit geringere Werte a_0 erwarten.

Zur Ermittlung der effektiven Durchmesser jeder der beiden betrachteten Wolkengruppen \bar{L}_j aus den charakteristischen Längen l_j (in Verbindung mit dem Parameter β_j) vergleichen wir die Ausdrücke für $(\Delta A_j)^2$, die einerseits das Modell diskreter Wolken und andererseits der durch (10) beschriebene Verlauf des Absorptionskoeffizienten liefern. Gl. (7) ergibt für den Ansatz (10)

$$\overline{(\Delta A_j)^2} = \overline{(\Delta \kappa_j)^2} \cdot \bar{r} l_j \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \beta_j\right). \quad (17)$$

Approximiert man den Verlauf des Absorptionskoeffizienten $\kappa_j(r)$ entlang des Sehstrahls im Bereich jeder Wolke der Gruppe j ($j = 1, 2$) durch ein Rechteck der stets gleichen Höhe κ_{j0} und Breite $\bar{L}_j =$ Durchmesser

der Wolke, dann läßt sich für $\overline{(\Delta \kappa_j)^2}$ schreiben

$$\overline{(\Delta \kappa_j)^2} = \overline{\kappa_j^2} - \frac{2}{\kappa_j} = \kappa_{j0}^2 \bar{\Delta}_j \nu_j - (\kappa_{j0} \bar{\Delta}_j \nu_j)^2.$$

Dabei bedeutet ν_j die mittlere Anzahl der kleinen ($j = 1$) bzw. großen ($j = 2$) Wolken pro 1 kpc des Sehstrahls; $j \bar{\Delta}_j \nu_j$ ist somit der Bruchteil des Sehstrahls, der von Wolken der Sorte j mit dem Absorptionskoeffizienten κ_{j0} ausgefüllt ist. Führt man die Absorptionen der Einzelwolken $\bar{a}_j = \kappa_{j0} \bar{\Delta}_j$ ein, dann folgt weiter

$$\overline{(\Delta \kappa_j)^2} = \bar{a}_j^2 \nu_j \frac{1 - \bar{\Delta}_j \nu_j}{\bar{\Delta}_j}.$$

Elimination von $\overline{(\Delta \kappa_j)^2}$ in (17) mittels dieses Ausdrucks und Einführung von

$$\overline{(\Delta A_j)^2} = \nu_j \bar{r} \bar{a}_j^2$$

auf der linken Seite ergibt die Beziehung

$$l_j = \frac{\bar{\Delta}_j}{\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \beta_j\right) (1 - \bar{\Delta}_j \nu_j)}. \quad (18)$$

Die beiden Größen β_j und $\bar{\Delta}_j \nu_j$ sind weitgehend äquivalent: Für das Modell zufällig entlang des Sehstrahls verteilter Wolken mit rechteckigem Absorptionsprofil erhält man nämlich die (eindimensionale) Korrelationsfunktion (s. Anhang 2)

$$K_{\Delta \kappa_j}(\xi) = \begin{cases} \frac{1 - \bar{\Delta}_j \nu_j - \frac{|\xi|}{\bar{\Delta}_j}}{1 - \bar{\Delta}_j \nu_j} & \text{für } |\xi| \leq \bar{\Delta}_j \\ 0 & \text{für } |\xi| > \bar{\Delta}_j. \end{cases} \quad (19)$$

Diese Funktion ist in Abb. 6 dargestellt. Aus der Abteilung (s. Anhang 2) geht hervor, daß der Sprung bei $\xi = \bar{\Delta}_j$ abgerundet wird, wenn die Konturen der Absorptionsverläufe in den Wolken z. B. glockenförmig statt rechteckig angenommen werden. Insgesamt tritt dann eine Annäherung von (19) an den Kurventyp des Ansatzes (10) (vgl. auch Abb. 5) ein; $\bar{\Delta}_j \nu_j$ drückt also wie β_j das Auftreten eines negativen Minimums im Verlauf der Korrelationsfunktion $K_{\Delta \kappa_j}(\varrho)$ aus. In erster Näherung sollte daher auch der bei $\varrho/l_j = \sqrt{(1 + \beta_j)/\beta_j}$ auftretende Minimumswert von (10) mit dem aus (19) folgenden Wert vergleichbar sein:

$$\exp\left\{-\frac{1 + \beta_j}{\beta_j}\right\} \cdot \beta_j \approx \frac{\bar{\Delta}_j \nu_j}{1 - \bar{\Delta}_j \nu_j}. \quad (20)$$

Mit dieser Bezeichnung und Gl. (18) liegen zwei Relationen zwischen $\bar{\Delta}_j$ und β_j vor, da die ermittelten Werte für l_j und ν_j nahezu unabhängig sind von den Annahmen über β_j . Neben den $\bar{\Delta}_j$ können daher auch Näherungswerte für die Parameter β_j berechnet werden, denen ein erhöhtes Gewicht zukommt, weil sie im Rahmen des Wolkenmodells mit

den verhältnismäßig gut bestimmten Größen l_j bzw. $\bar{\Delta}_j$ und ν_j verträglich sind, was von den oben angegebenen Werten $\beta_1 = 1.5$ und $\beta_2 = 1.2$ nicht von vornherein gesagt werden kann. Damit bietet sich eine Möglichkeit, zu klären ob die Überhöhungen an den „Stufen“ der beobachteten Strukturfunktion als unmittelbare Folgen des Auftretens

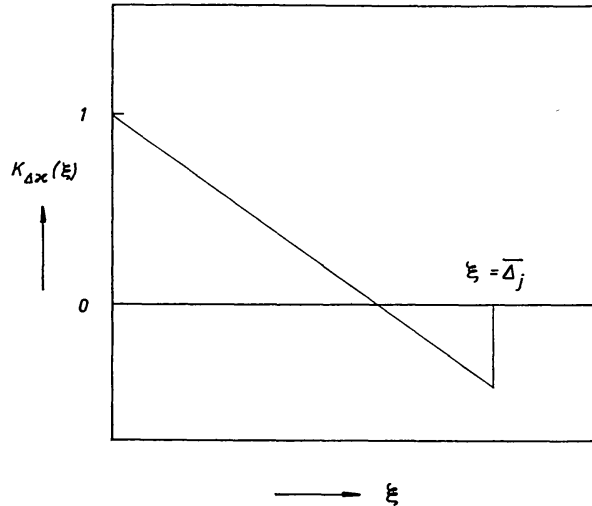


Abb. 6. Eindimensionale Korrelationsfunktion $K_{\Delta x}(\xi)$ zufällig verteilter Wolken mit rechteckigen Absorptionsverläufen, deren Breiten (= Wolkendurchmesser Δ_j) und Höhen für alle Wolken gleich sind.

diskreter Wolken gedeutet werden dürfen oder eine andere Ursache haben müssen. Löst man (18) und (20) mit $l_1 = 2 \text{ pc}$, $\nu_1 = 5 \text{ kpc}^{-1}$, $l_2 = 60 \text{ pc}$ und $\nu_2 = 1 \text{ kpc}^{-1}$ (die Werte der Tabelle 3 für ν_2 dürften wegen des restlichen Auswahleffektes etwas unterschätzt sein) nach $\bar{\Delta}_j$ und β_j auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \beta_1 &\approx 0.4 & \beta_2 &\approx 0.7 \\ \bar{\Delta}_1 &= 1.4 l_1 \approx 3 \text{ pc}^1 & \bar{\Delta}_2 &= 1.1 l_2 \approx 70 \text{ pc} \\ \bar{\Delta}_1 \nu_1 &\approx 0.01 & \bar{\Delta}_2 \nu_2 &\approx 0.1 . \end{aligned}$$

Für den Anteil der großen Wolken werden damit die beobachteten negativen Korrelationswerte bestätigt. Der Unterschied gegen $\beta_2 = 1.2$, entsprechend $\bar{\Delta}_2 \nu_2 = 0.16$, liegt praktisch noch im Rahmen der Unsicherheitsgrenzen. Die Überhöhungen der Punkte der Strukturfunktionen für $\bar{r} = 815 \text{ pc}$ und 1300 pc bei $\varphi = 0^\circ 65$ gegenüber $\varphi = 2^\circ 05$ (Abb. 2) sind indessen für $l_1 \lesssim 3 \text{ pc}$ und $\nu_1 \approx 5$ nicht zu erwarten. Sie würden $\bar{\Delta}_1 \nu_1 \approx 0.2$ erfordern, einen Wert der unvereinbar ist mit $l_1 < 10 \text{ pc}$ bei $\nu_1 \approx 5$, und haben daher kaum reale Bedeutung. Die Ergebnisse der Tabelle 3 bleiben von diesem Schluß unberührt, da für eine Änderung von α kein Anlaß besteht.

¹ SERKOWSKI, 1958, findet im Fall $\beta_1 = 0$: $\bar{\Delta}_1 \approx l_1$, während Gl. (18) dann auf $\bar{\Delta}_1 = 1.77 l_1$ führt. Da er für die Verteilung der Δ annimmt $f(\Delta) = \exp(-\Delta/\bar{\Delta}_1)$, so werden Beträge $\Delta < \bar{\Delta}_1$ bevorzugt und es ergibt sich gerade der kleinere Faktor.

Die Größen \bar{a}_j und $\bar{\Delta}_j$ sind als Mittelwerte der Absorptionen a und Durchmesser Δ der Wolken mit $a < 1^m0$ ($j = 1$) bzw. $a \geq 1^m0$ ($j = 2$) anzusehen. Für die mittleren Anzahlen n_j der Wolken jeder dieser Gruppen pro 1 kpc^3 und die Bruchteile des Raumes f_j , die von ihnen erfüllt werden, können näherungsweise die für einen einheitlichen Wolkentyp gültigen Beziehungen angesetzt werden ($\bar{\Delta}_j$ in kpc)

$$v_j = \frac{1}{4} \pi \bar{\Delta}_j^2 n_j, \quad f_j = \frac{1}{6} \pi \bar{\Delta}_j^3 n_j. \quad (21)$$

Damit erhält man zu den obigen Ergebnissen: $n_1 \approx 1 \cdot 10^6 \text{ kpc}^{-3}$, $n_2 \approx 3 \cdot 10^2 \text{ kpc}^{-3}$ und $f_1 \approx 0.02$, $f_2 \approx 0.1$.

4. Diskussion; Vergleich mit dem interstellaren Gas

Zum Vergleich unserer Ergebnisse mit denen der klassischen Dunkelwolkenuntersuchungen läßt sich zunächst folgendes sagen: Auf Grund ihrer Wirkung auf die scheinbare Sternverteilung im Bereich der Milchstraße können selbst große Dunkelwolken nur erkannt werden, wenn sie näher als etwa 500 pc liegen (Diskussion von GREENSTEIN, 1937, in Verbindung mit den heute angenommenen Werten \bar{A}). Vollständige Erfassung der großen Wolken durch die älteren, auf Sternzählungen beruhenden Methoden kann daher praktisch nur für das erste unserer Entfernungsintervalle (Tabelle 1) erwartet werden. Mit $\bar{\Delta}_2 = 70 \text{ pc}$ und $v_2 = 0.12 \text{ kpc}^{-1}$ nach Tabelle 3 erhält man $n_2 = 4v_2/\pi\bar{\Delta}_2^2 = 31$. Im Volumen $r \leq 325 \text{ pc}$, $|z| \leq 100 \text{ pc}$ liefert diese Zahl als Erwartungswert 2 große Wolken. Tatsächlich kennen wir in diesem Bereich nur zwei große Dunkelwolkenkomplexe, nämlich um Taurus und um Ophiuchus, deren Entfernungen unter 200 pc und deren Durchmesser zu 60 ... 80 pc gefunden wurden (GREENSTEIN, 1937). Die älteren Dunkelwolken-Untersuchungen haben sich vorwiegend mit den besonders auffälligen kleineren Kondensationen innerhalb solcher Komplexe beschäftigt, in denen häufig extreme Absorptionswerte oberhalb unseres Mittelwertes $\bar{a}_2 = 1^m6$ (Tabelle 3) auftreten, die nicht für den ganzen Wolkenkomplex typisch sind.

Unter der Voraussetzung, daß kleine und große Wolken Staubpartikel mit der gleichen Durchmesserverteilung und mit gleichen optischen Eigenschaften enthalten, folgt für das Verhältnis der mittleren Staabdichten in den beiden Wolkengruppen $\rho_{s1}/\rho_{s2} = \bar{a}_1\bar{\Delta}_2/\bar{a}_2\bar{\Delta}_1 \approx 5 \dots 10$. Die „großen Wolken“ unserer Statistik sind wahrscheinlich relativ lockere Komplexe mit Teilstrukturen, deren Durchmesser etwa 10 ... 50 pc betragen. Untersuchungen der individuellen Staubverteilung mit Hilfe von Farbezessen einer hinreichenden Anzahl naher Sterne, wie sie STRÖMGREN und CRAWFORD, 1962, für $r < 200 \text{ pc}$ ausgeführt haben, können diese Teilstrukturen erfassen. STRÖMGREN berichtet u. a. über

Wolken mit $a = 0^m4$ (entsprechend 10^m pro 1 kpc) und Durchmessern $\Delta \approx 40$ pc in den Bereichen um Ophiuchus und Taurus.

Für die außerhalb der großen Wolken noch vorhandene staubförmige Materie ergibt sich zusammen mit den Resultaten der Arbeit II das folgende Argument gegen die Vorstellung eines stark fluktuierenden *kontinuierlichen* Dichtefeldes. Die ausgeprägte Asymmetrie der Häufigkeitsverteilungen $N(A, \bar{r})$ der Absorptionswerte A für die beiden ersten Entfernungsmittelwerte $\bar{r} = 325$ pc und $\bar{r} = 515$ pc, deren Realität nicht bezweifelt werden kann, läßt sich nur durch eine *kleine* durchschnittliche Anzahl von Staubbichtemaxima entlang des Sehstrahls, $\nu_1 < 10$, verstehen. Andererseits ist die Ausdehnung einer solchen Verdichtung nach Aussage der Strukturfunktion $D_A(\varphi)$ mit $\Delta_1 \lesssim 3$ pc anzusetzen. Damit ergeben sich sehr isolierte starke Verdichtungen, die als diskrete Wolken angesehen werden dürfen.

Beobachtungsergebnisse über die Wolkenstruktur des interstellaren Gases, die hier zum Vergleich herangezogen werden können, betreffen vor allem Aussagen über $\nu = \nu_1 + \nu_2$ ($\approx 5 \dots 10$, siehe z. B. VAN DE HULST, 1957) aus der optischen Linienabsorption (wobei auch relativ heiße Wolken eingeschlossen werden), aus der Emission bei $\lambda = 21$ cm in höheren galaktischen Breiten (vgl. z. B. LAMBRECHT, 1965) und der 21 cm-Absorption (CLARK, 1965: $\nu = 4 \dots 8$ kpc $^{-1}$). 21 cm-Beobachtungen liefern außerdem Durchmesser und optische Dicken von HI-Wolken. Die mit unserem Wert für $\bar{\Delta}_1$ gut übereinstimmenden Resultate von TAKAKUBO und VAN WOERDEN (BLAAUW, 1962) sind wegen der relativ geringen Winkelauflösung der 21 cm-Emissionsbeobachtungen wahrscheinlich verhältnismäßig unsicher. Unmittelbare Ergebnisse über Wolkendurchmesser liegen bisher nur in wenigen Einzelfällen vor, teilweise basierend auf hypothetischen Entfernungen. Eine Statistik der Wolkenausdehnungen auf Grund dieser Messungen erscheint gegenwärtig noch nicht möglich. Unter den HI-Wolken, deren Durchmesser abgeschätzt werden konnten, finden sich mehrere mit $\Delta \approx 1 \dots 7$ pc (CLARK, RADHAKRISHNAN und WILSON, 1962; CLARK, 1965). Sehr wahrscheinlich zur gleichen Kategorie gehören vier von DIETER, 1965, untersuchte Wolken, deren Durchmessermittelwert sich für die hypothetische mittlere Entfernung $\bar{r} = 100$ pc (Beobachtungen nahe den galaktischen Polen) zu $\Delta \approx 9$ pc ergibt. Zumindest ein Teil dieser Wolken kann eine kleinere Entfernung und somit noch kleinere Dimensionen besitzen. Dem Fall der ausgesprochen großen Wolken ist das von MURRAY und Mc GEE, 1958, untersuchte Objekt mit $\Delta \approx 50$ pc zuzurechnen. Einige verbleibende Durchmesserangaben (CLARK et al., 1962; GRAHL, 1960) liegen bei $10 \dots 20$ pc.

Bei angenähert gleichem Gas:Staub-Verhältnis in großen und kleinen Wolken sollten die letzteren ein zahlenmäßiges Überwiegen schwacher

Komponenten in den 21 cm-Absorptionsprofilen ergeben. Tatsächlich zeigen dies die Beobachtungen von CLARK, RADHAKRISHNAN und WILSON, 1962; SHUTER und VERSCHUUR, 1964 sowie besonders deutlich die neuen Ergebnisse von CLARK, 1965. Ebenfalls eine große Häufigkeit der Wolken geringer optischer Dicke zeigen die Profile der 21 cm-Emission nach einer Untersuchung von DIETER, 1965. Eine Diskussion der Verteilung der optischen Dicken interstellarer Wolken im visuellen Bereich sowie bei $\lambda = 21$ cm in Verbindung mit den hier gewonnenen Aussagen über die Wolkendimensionen im Hinblick auf das Massenspektrum der Wolken soll einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben.

Für seine Unterstützung bei der Berechnung der Strukturfunktionen bin ich Herrn Dr. TH. NECKEL sehr zu Dank verpflichtet.

Anhang 1: Ableitung der Gl. (6)

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann die durch Abb. 7 erläuterte Lage des Koordinatensystems gewählt werden. Die aus den Punkten $P_1(x, y_1)$ bzw. $P_2(x, y_2)$ kommende Lichtstrahlung erfährt auf

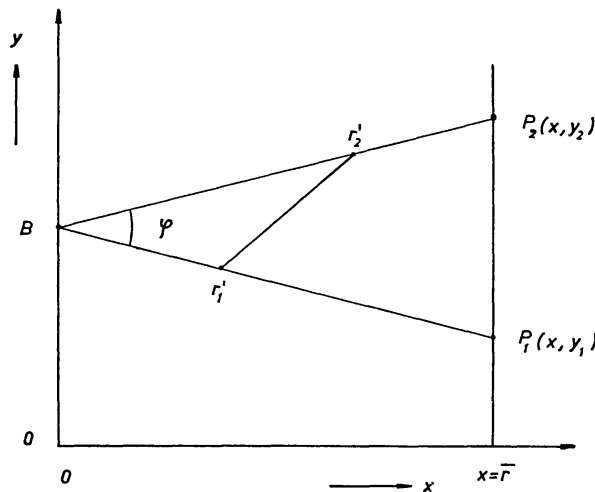


Abb. 7. Wahl des Koordinatensystems zur Ableitung der Gleichung (6).

dem Wege zum Beobachter B Absorptionen, die vom Mittelwert $\bar{A}(\bar{r})$ abweichen um die Beträge

$$\Delta A(l_i; r) = \Delta A(P_i) = \int_0^{x'_i = \bar{r}} \Delta \kappa(r'_i) dx'_i, \quad i = 1, 2.$$

Dabei bedeuten l_i die galaktischen Längen beider Punkte, so daß gilt $\varphi = |l_1 - l_2|$; ferner sind $r'_i(x'_i, y'_i)$ die Vektoren der Integrationspunkte auf den Lichtstrahlen \overline{BP}_i mit den Beträgen $|r'_i| = r'_i$.

Wir bilden zunächst die Kovarianz der beiden Absorptionsdifferenzen $\Delta A(P_i)$:

$$\overline{\Delta A(P_1)\Delta A(P_2)} = \overline{(\Delta \kappa)^2} \int_0^x \int_0^x K_{\Delta \kappa}(|x'_1 - x'_2|, |y'_1 - y'_2|) dr'_1 dr'_2.$$

Da bei den beabsichtigten Anwendungen $\varphi \lesssim 10^\circ$, so sind folgende wesentliche Vereinfachungen dieses Ausdrucks möglich:

$$|x'_1 - x'_2| = |r'_1 - r'_2|, \quad |y'_1 - y'_2| = r'_2 \sin \varphi.$$

Die zweite Gleichung wird zwar falsch, wenn $|r'_1 - r'_2|$ nicht mehr klein gegen \bar{r} ist, wir können aber annehmen, daß die linearen Ausdehnungen der größten Wolkenstrukturen noch immer klein sind gegenüber den betrachteten Entfernungen \bar{r} , also die Korrelationsfunktion $K_{\Delta \kappa}(|x'_1 - x'_2|, |y'_1 - y'_2|)$ gerade für jene größeren Abstände $|r'_1 - r'_2|$ verschwindet, bei denen $|y'_1 - y'_2|$ merklich verschieden von $r'_2 \cdot \sin \varphi$ ist.

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \overline{\Delta A(P_1)\Delta A(P_2)} &= \overline{(\Delta \kappa)^2} \int_0^{\bar{r}} \int_0^{\bar{r}} K_{\Delta \kappa}(|r'_1 - r'_2|, r'_2 \sin \varphi) dr'_1 dr'_2 \\ &= 2 \overline{(\Delta \kappa)^2} \int_0^{\bar{r}} dr'_2 \int_{r'_2}^{\bar{r}} dr'_1 K_{\Delta \kappa}(r'_1 - r'_2, r'_2 \sin \varphi) \\ &= 2 \overline{(\Delta \kappa)^2} \int_0^{\bar{r}} dr'_2 \int_0^{\bar{r}-r'_2} d\xi K_{\Delta \kappa}(\xi, r'_2 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Da $K_{\Delta \kappa}(\xi, \eta)$ für $\xi > \bar{r} - r'_2$ nur im Bereich $\bar{r} - r'_2 \ll \bar{r}$ merkliche endliche Werte annimmt, kann die obere Grenze der ξ -Integration durch ∞ ersetzt werden. Denn nur in einem unbedeutend kurzen Teilbereich des r'_2 -Intervalles ($0 \dots \bar{r}$), nämlich kurz bevor $r'_2 = \bar{r}$ wird, weicht das innere Integral von einem bis ∞ geführten Integral ab. Für die Korrelationsfunktion $K_{\Delta A}(\varphi) = \overline{\Delta A(P_1)\Delta A(P_2)}/\overline{(\Delta A)^2}$ erhalten wir damit bei hinreichend kleinen Winkeldistanzen ($\sin \varphi \approx \varphi$) den Ausdruck (6).

Anhang 2: Ableitung der Gl. (19)

Die absorbierende Materie bestehe ausschließlich aus zufällig im Raum verteilten Wolken. Auf die Längeneinheit treffe der Sehstrahl ν Wolken. Die Variation des Absorptionskoeffizienten κ mit der willkürlich orientierten x -Koordinate kann als stationärer stochastischer Prozeß aufgefaßt werden mit der Kovarianz

$$\overline{\kappa(x_1)\kappa(x_2)} = \int \int \kappa_1, \kappa_2 f_2(\kappa_1, x_1; \kappa_2, x_2) d\kappa_1 d\kappa_2. \quad (22)$$

Dabei ist $f_2(\kappa_1, x_1; \kappa_2, x_2)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei x_1 der Wert κ_1 und bei x_2 der Wert κ_2 auftritt. Mit der Wahrscheinlichkeit des Wertes κ : $f_1(\kappa, x) = f_1(\kappa)$ gilt

$$f_2(\kappa_1, x_1; \kappa_2, x_2) = f_1(\kappa_1) f_2(\kappa_1, x_1 | \kappa_2, x_2),$$

wobei nun $f_2(\kappa_1, x_1 | \kappa_2, x_2)$ die Übergangswahrscheinlichkeit von $\kappa(x_1) = \kappa_1$ nach $\kappa(x_2) = \kappa_2$ bedeutet, die im vorliegenden Fall nur von $|x_1 - x_2|$ abhängt. Der Verlauf von $\kappa(x)$ im Bereich jeder Wolke folge einem Kastenprofil mit der Breite Δ_0 und der Höhe κ_0 . Dann gilt

$$f_1(\kappa) = \begin{cases} \Delta_0 \nu & \text{für } \kappa = \kappa_0 \\ 1 - \Delta_0 \nu & \text{für } \kappa = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß x_2 in eine Wolke fällt, wenn x_1 innerhalb einer Wolke lag, ist im wesentlichen gegeben durch

$$f_2(\kappa_0, x_1 | \kappa_0, x_2) = \begin{cases} \Delta_0 \nu & \text{für } |x_1 - x_2| > \Delta_0 \\ \frac{\Delta_0 - |x_1 - x_2|}{\Delta_0} & \text{für } |x_1 - x_2| \leq \Delta_0. \end{cases} \quad (24)$$

Da $f_2(\kappa_1, x_1 | \kappa_2, x_2)$ nur für $\kappa_1, \kappa_2 = 0$ bzw. κ_0 endliche Werte besitzt und alle Anteile am Integral (22) mit $\kappa_1 = 0$ oder/und $\kappa_2 = 0$ verschwinden, erhält man

$$\overline{\kappa(x_1)\kappa(x_2)} = \kappa_0^2 f_1(\kappa_0) f_2(\kappa_0, x_1 | \kappa_0, x_2). \quad (25)$$

Einführung von $\Delta\kappa(x) = \kappa(x) - \bar{\kappa}$ ergibt

$$K_{\Delta\kappa}(\xi) = \frac{\overline{\Delta\kappa(x)\Delta\kappa(x+\xi)}}{(\Delta\kappa)^2} = \frac{\overline{\kappa(x)\kappa(x+\xi)} - \bar{\kappa}^2}{\kappa^2 - \bar{\kappa}^2}. \quad (26)$$

Unter Beachtung von $\bar{\kappa} = \kappa_0 \Delta_0 \nu$ und $\overline{\kappa^2} = \kappa_0^2 \Delta_0 \nu$ erhält man nach Einsetzen von (25) mit (23) und (24) in (26) die Gl. (19) für $\bar{\Delta}_j = \Delta_0$ (Abb. 6). Für $\Delta_0 \nu \ll 1$ geht (19) in einen Ausdruck über, der auch aus SERKOWSKI'S, 1958, Gleichung (114) erhalten werden kann, indem man dort für die Verteilung der Wolkendurchmesser eine δ -Funktion vom Argument $a - \bar{a} = a - \Delta_0$ einführt.

Literatur

- BLAAUW, A.: In: Interstellar matter in galaxies. S. 48. (ED. L. WOLTJER). New York: W. A. Benjamin, Inc. 1962.
 CLARK, B. G., V. RADHAKRISHNAN, and R. W. WILSON: *Astrophys. J.* **135**, 151 (1962).
 CLARK, B. G.: *Astrophys. J.* **142**, 1398 (1965).
 DIETER, H.: *Astron. J.* **70**, 552 (1965).
 GRAHL, B. H.: *Mitt. Astron. Inst. Bonn* Nr. 61 (1965).
 GREENSTEIN, J. L.: *Ann. Harvard* **105**, 359 (1937).
 HULST, H. C. van de: In: Proceedings of the third symposium on cosmical gas dynamics (ed.: J. M. BURGERS, R. N. THOMAS). I.A.U. Symposium Nr. 8, S. 913 (1957).